CALCUL DE PROBABILITES

I-Expérience aléatoire - Evénement- Univers:

1-Activité :

expérience 1 : On lance un dé (cube à six faces numérotés de 1 à 6) et on note le résultat de la face supérieure.Quel sont les résultats possibles ?

expérience 2 : On lance une pièce de monnaie 3 fois successives et on note à chaque fois le résultat de la face supérieure.Quels sont les résultats possibles ?

2-Expérience aléatoire-Eventualité-Univers-Evénement :

Définitions et exemples

Expérience aléatoire : On appelle expérience aléatoire toute expérience dont les résultats possibles sont connus mais on ne peut pas donner le résultat exact avant de la réaliser.

exemple : expérience 1 et expérience 2

Les résultats possibles de ces deux expériences aléatoires :

exemple: expérience 1: $\{1,2,3,4,5,6\}$

expérience 2: $\{FFF, FFP, FPF, FPP, PPP, PPF, PFP, PFF\}$

Eventualité-Evénement élémentaire : Chaque cas possible s'appelle éventualité ou événement élémentaire.

exemple:
expérience 1: $\{1\}$ est une éventualité
expérience 2: $\{FPF\}$ est une éventualité

Univers : les éventualités (ou les événements élémentaires) constituent un ensemble qu´ on appelle univers.

On le note Ω

expérience 1: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

expérience 2: $\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PPP, PPF, PFP, PFF\}$

Evènement : toute partie A de Ω s'appelle événement .

expérience 1: $A=\{1,4\}$ est un événement.

expérience 2: $B=\{FFP,PPF,PFF\}$ est un événement.

3- Vocabulaire et notation :

- L'événement $A=\varnothing$ s'appelle **événement impossible** .
- L'événement $A = \Omega$ s'appelle **événement certain** .
- **L'événement $A \cap B$** est l'ensemble constitué par des éventualités réalisées à la fois par les deux événements A et B .

  expérience1: $A=\{1,3,4\}$ et $B=\{2,3,4,6\}$ alors $A \cap B = \{3,4\}$
- **L'événement $A \cup B$** est l'ensemble constitués par des éventualités réalisées soit par l'événement A ou par l'événement B .

expérience1: $A=\{1,3,4\}$ et $B=\{2,3,4,6\}$ alors $A \cup B=\{1,2,3,4,6\}$

- Si $A \cap B=\varnothing$ on dit que A et B sont **deux événements incompatibles .**

expérience1: $A=\{1,3,4\}$ et $B=\{2,6\}$ alors $A \cap B=\varnothing$

- Si $A \cap B=\varnothing$ et $A \cup B=\Omega$ alors B s'appelle **l'événement contraire de A** on le note $\overline{B}$
  et on a $A=\overline{B}$ et $\overline{A}=B$ .On dit que A et B constituent une partition de Ω

expérience1: $A=\{1,4\}$ l'événement contraire de A est $\overline{A}=\{2,3,5,6\}$

expérience2: $B=\{FFP,PPF,PFF\}$ l'événement contraire de A est $\overline{B}=\{FPP;FPF;PFP;FFF;PPP\}$

II- Notion de probabilité :

1- Activité :

On lance dans l'air une pièce de monnaie et on marque à chaque fois la face supérieur.

On répéte cet expérience 100 fois. Ce tableau donne le nombre de réalisations de chaque face:

face	F	P
Nombres des fois	53	47

1.Déterminer l´ événement élémentaire qui a la plus grande chance d être réaliser.

2.Déterminer l´ événement élémentaire qui a la plus petite chance d être réaliser.

1.C´ est l´ événement élémentaire **F** qui a la plus grande chance d´ être réaliser.

On dit que la probabilité de l événement élémentaire **F** est $\frac{53}{100}$ on écrit $p(\{F\})=\frac{53}{100}$

2.Cest l événement élémentaire **P** qui a la plus petite chance d être réaliser.

On dit que la probabilité de l événement élémentaire **P** est $\frac{53}{100}$ on écrit $p(\{P\})=\frac{47}{100}$

2- Définition:

Soit $\Omega=\{x_1,x_2,....,x_n\}$ univers des éventualités d'une expérience aléatoire .

Lorsque on répète une expérience aléatoire N fois dans les mêmes conditions si n_i est le nombre de fois qu'on a obtenue x_i . Le nombre $\frac{n_i}{N}$ s'appelle la probabilité de l' événement élémentaire $\{x_i\}$

on note $p_i=p(\{x_i\})=\frac{n_i}{N}$ on a: $p_1+p_2+p_3+\cdots p_n=1.$

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent:

Si $A=\{x_1,x_3,x_7\}$ alors $p(A)=p(\{x_1\})+p(\{x_3\})+p(\{x_7\})$

Exemple

Dans l'activité précédente: $\Omega=\{F, P\}$ donc $p(\{F\})+p(\{P\})=1$

Propriété

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire

$\forall A\in\Omega : 0\leq p(A)\leq 1$; $p(\Omega)=1$; $p(\varnothing)=0$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$p(\overline{A})=1-p(A)$.

Exercice 1

Une urne contient 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne.

1) Déterminer Ω l' univers des cas possibles.

2) Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

3) Considérons les événements suivants :

A : " La boule tirée est blanche "

B : " La boule tirée porte un numéro supérieur ou égal à 4 "

C : " La boule tirée est verte et porte un numéro pair "

a) Calculer p(A) , p(B) et p(C)

b) Déterminer AUB puis montrer que p(AUB) = p(A) + p(B)

c) A-t-on p(B UC) = p(B) + p(C)

4) Considérons les événements suivants :

D : " La boule tirée est verte "

E : " La boule tirée est blanche ou porte un numéro impair "

Calculer p(D) et p(E) en utilisant 3)a)

3- Hypothèse d' équiprobabilité :

Propriété :

Soit une expérience aléatoire d' univers Ω ou tout les événements élémentaires ont même probabilité alors probabilité d'un évènement A de Ω est :

$$\boxed{p(A)=\frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}}$$

Remarque

L'équiprobabilité est exprimé par les expressions suivantes:

-Les boules sont indiscernables au toucher.

-On lance un dé au hasard .

-On lance une pièce de monnaie équilibrée .

Exemple

On lance au hasard dans l'air un dé et on note le nombre de points de la face supérieur.

Soit l'événement : A= {1,2,5,6 } on a $p(A)=\frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{4}{6}$ avec $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Exercice 2

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

1) Déterminer l'univers des cas possibles.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:

A:" Obtenir au moins deux piles "

B:" Obtenir face au premier lancer et pile au deuxième lancer "

C:" Obtenir au plus une fois pile "

3) Les deux événements A et C sont ils incompatibles ?

4- Exercices d'application:

Exercice 3 :

Un sac contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 2 boules blanches. On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac.

1) combien y' a-t-il de résultats possibles ?

2) Calculer la probabilité de chaque événement :

A:" Obtenir 3 boules de même couleur "

B :" Obtenir 3 boules de couleurs distinctes deux à deux "

C:" Obtenir 3 boules de couleurs distinctes"

D :" Obtenir au plus 2 boules rouges "

E :" Obtenir au moins une boule blanche "

Exercice 4 :

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 rouges numérotées 1,0,2 et 5 noires numérotés:0,0,0,1,1.

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

1)Calculer les probabilités de chacun des événements suivants:

A:" Obtenir 3 boules de même couleur "

B:" Obtenir 3 boules avec des numéros pairs "

C:" Obtenir 3 boules avec 3 numéros disjoints deux à deux "

D:" Obtenir 3 boules de même numéro "

2)Calculer les probabilités de chacun des événements suivants:

$\overline{A}$, $A \cap B$ puis $A \cup B$

III- Probabilité conditionnelle- indépendance de deux événements:

1- Probabilité conditionnelle -indépendance de deux événements:

Définitions :

A et B sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire .

Probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé est $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

on la note par $p_A(B)$ ou par $p(B/A)$ donc on a $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

A et B sont deux événements indépendants si $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ c'est à dire: $p_A(B)=p(B)$.

Proprietés :

A et B deux évenements non vides c à d : $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$

On a : $p(A\cap B)=p(A)p_A(B)=p(B)p_B(A)$

Exercice 5 :

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 boules noires numérotées 0,0,0,1,1
3 boules blanches numérotées 1,1,2
2 boules rouges numérotées 2,2

On tire simultanément et au hasard 3 boules du sac

On considère les deux événements suivants :

A : " les boules tirées ont la même couleur "

B : " les boules tirées portent le même numéro "

1)Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(A\cap B)$

2)Est-ce que les événements A et B sont indépendants ?

3) Calculer la probabilité de chaque événement :

C : " les boules tirées portent le même numéro sachant qu'il ont la même couleur "

D : " les boules tirées ont la même couleur sachant qu' il portent le même numéro "

2- Expérience composée :

Définitions :

A_1 et A_2 sont deux événements d'un univers Ω d'une expérience aléatoire et qui forment une partition de Ω c à d A_1 et A_2 sont disjoints et $A_1 \cup A_2=\Omega$.

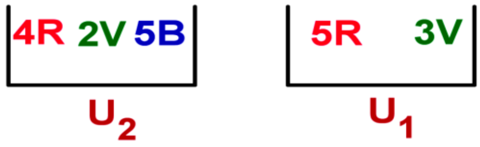
La probabilité d'un événement B de Ω est : $p(B)=p(A_1)p_{A_1}(B)+p(A_2)p_{A_2}(B)$

Exemple :

On considère deux urnes U_1 et U_2 tel que :

U_1 contient 5 jetons rouges et 3 jetons verts.

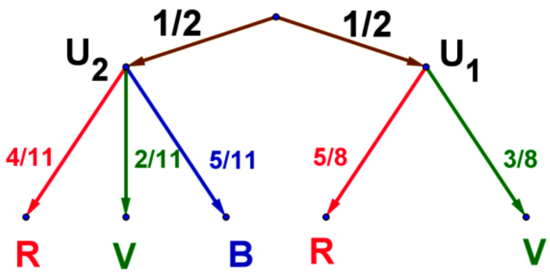
U_2 contient 4 jetons rouges, 2 jetons verts et 5 jetons bleu



On choisit au hasard une urne puis on tire un seul jeton .

Soit l'événement V:" le jeton tiré a la couleur verte "

On construit l'arbre de probabilité :



On calcule la probabilité de l'événement V :

On considère les événements suivants :

U_1 « le choix de l'urne U_1 » U_2 « le choix de l'urne U_2 »

On a : $$V=(U_1\cap V)\cup(U_2\cap V)$$

Donc : $$\begin{aligned} p(V)&=P((U_1\cap V)\cup(U_2\cap V)) \\ &=p(U_1\cap V)+p(U_2\cap V) \\ &=p(U_1)p_{U_1}(V)+p(U_2)p_{U_2}(V) \\ &=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{11} \end{aligned}$$

D' ou $$p(V)=\frac{49}{176}$$

IV- Variable aléatoire- loi de probabilité :

1- Variable aléatoire:

Activité:

Un sac contient 6 cartes indiscernables au toucher numérotés de 1 à 6 .
On tire au hasard et simultanément 3 cartes du sac.
On associe chaque à tirage le nombre de cartes qui portent un numéro pair.

Cette relation est entre l'ensemble des cas possible Ω et l'ensemble $\mathbb{R}$

On la note X et on l'appelle variable aléatoire sur Ω et on a:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$A_i \mapsto X(A_i) = x_i$$

x_i est le nombre de cartes de numéros pairs pour chaque tirage A_i

$X = 0$:" toutes les cartes tirées portent des numéros impairs "

$X = 1$:" une seule carte des cartes tirées porte un numéro pair "

$X = 2$:" deux cartes exactement des cartes tirées porte un numéro pair "

$X = 3$:" les trois cartes tirées portent des numéros pairs "

Les valeurs du variable aléatoire X sont : 0,1,2,3 et on écrit : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

Vocabulaire:

En général on note: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire X.

L'écriture $p(X = x_i)$ c'est la probabilité de l'événement $A_i = (X = x_i)$

Exemple :

Calculer la probabilité de chaque valeur de la variable aléatoire X de l'activité précédente.

On tire simultanément 3 cartes parmi 6 donc $\text{card}\,\Omega = C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

$$p(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$$ " X = 0 " : 3 cartes impairs

$$p(X=1) = \frac{\text{card}(X=1)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^1 \times C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}$$ " X = 1" : 1pair et 2 impairs

$$p(X=2) = \frac{\text{card}(X=2)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^2 \times C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20}$$ " X = 2" : 2pairs et 1 impair

$$p(X=3) = \frac{\text{card}(X=3)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$$ " X = 3" : 3 cartes pairs

2- Loi de probabilité dune variable aléatoire:

Définition:

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$

Loi de probabilité de X : c'est de calculer toutes les probabilités $p(X = x_i)$ avec $x_i \in X(\Omega)$

On peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	.....	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_1)$	$p(X = x_2)$	.....	$p(X = x_n)$

Remarque:

$$p(X=x_1)+p(X=x_2)+p(X=x_3)+\cdots+p(X=x_n)=1$$

Exemple :

La loi de probabilité du variable aléatoire X de l'exemple précédent est:

$X=x_i$	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

et on a : $\frac{1}{20}+\frac{9}{20}+\frac{9}{20}+\frac{1}{20}=1$

V- Espérance mathématique- variance- écart type :

1- Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire .

L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega)=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$

- **Le nombre : E(X)** $=\sum_{i=1}^{i=n} x_i\cdot p(X=x_i)=x_1\cdot p(X=x_1)+x_2\cdot p(X=x_2)+\cdots+x_n\cdot p(X=x_n)$

  s'appelle l'espérance mathématique du variable aléatoire X

- **Le nombre** $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

  $=(x_1)^2\cdot p(X=x_1)+(x_2)^2\cdot p(X=x_2)+\cdots+(x_n)^2\cdot p(X=x_n)-[E(X)]^2$ **s'appelle**

  la variance du variable aléatoire X .

- **Le nombre :** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ **s'appelle l' ecart-type du variable aléatoire X .**

2- Remarque:

$$V(X)\geq 0$$

3- Exemple :

Calcule de l'espérance mathématique,variance et écart-type du variable aléatoire de l'exemple précédent.

x_i	$x_1=0$	$x_2=1$	$x_3=2$	$x_4=3$
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$
$x_i\times p(X=x_i)$	0	$\frac{9}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{3}{20}$
$x_i^2\times p(X=x_i)$	0	$1^2\times\frac{9}{20}$	$2^2\times\frac{18}{20}$	$3^2\times\frac{3}{20}$

D'après le tableau on a:

l'espérance mathémathique de X

$$E(X)=x_1\times p(X=x_1)+x_2\times p(X=x_2)+x_3\times p(X=x_3)+x_4\times p(X=x_4)$$
$$= 0+\frac{9}{20}+\frac{18}{20}+\frac{3}{20}=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$$

la variance de X

$$V(X)=(x_1)^2\times p(X=x_1)+(x_2)^2\times p(X=x_2)+\cdots+(x_n)^2\times p(X=x_n)-[E(X)]^2$$
$$= 0+1^2\times\frac{9}{20}+2^2\times\frac{18}{20}+3^2\times\frac{3}{20}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{63}{20}$$

l'écart-type de X

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$
$$=\sqrt{\frac{63}{20}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}$$

V- Loi binomiale :

1- Définition :

Soit p la probabilité d'un événement S d'une expérience aléatoire.

On répète cette expérience n fois .On considère X la variable aléatoire associé au nombre de fois ou l'événement S est réalisé. On a : $X(\Omega)=\{0,1,2,\ldots,n\}$

X est appelé **loi binomiale** ou **distribution binomiale** de paramètres n et p.

2- Proprietés :

Soit X une loi binomiale de paramètres n et p. On a:

$E(X) = n.p$ et $V(X) = n.p.(1- p)$

3- Exemple :

On considère l'expérience aléatoire de l' exemple précédent.Soit l'événement S:" les trois cartes tirées portent des numéros impairs" On a S : (X=0) et $p(S) = p(X=0) = \frac{1}{20}$

On répète cette expérience(tirage de 3 cartes simultanément) 4 fois avec les même conditions de départ.

On considère la variable aléatoire X associée au nombre de fois où l' événement S est réalisé .

X est une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{20}$

Calculons l'espérance mathématique et la variance de la loi binomiale X

$E(X) = n.p$

$= 4 \times \frac{1}{20}$

$= \frac{1}{5}$

$V(X) = n.p.(1- p)$

$= 4 \times \frac{1}{20} \times (1-\frac{1}{20})$

$= \frac{19}{100}$